ММО, 10 класс

1. М. Евдокимов

   На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую, то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0?

   Ответ: 1609.

   Решение.

   Предпоследняя цифра числа равна 0, так как число без последней цифры делится на 20. Значит, число хотя бы четырёхзначное. Заметим, что число, оставшееся после стирания последней цифры, не может равняться 100 по условию. Также это число не может равняться 120 и 140, так как числа вида $\overline{20a}$ и $\overline{40a}$ не делятся на 21. Для 160 существует единственный пример: 1609.

2. А. Блинков

   Дана равнобокая трапеция, сумма боковых сторон которой равна большему основанию. Докажите, что острый угол между диагоналями не больше чем 60 градусов.

   Решение 1.

   Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD,где $AD = AB+CD = 2AB$. В треугольнике ABD угол $\sin\angle ADB = \frac{AH}{AD} \leqslant \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}$, где AD – высота из точки A. Тем самым угол $\angle ADB \leqslant 30^\circ$, аналогично $\angle CAD \leqslant 30^\circ$. В треугольнике AOD, где точка O – точка пересечения диагоналей, угол $\angle AOB \geqslant 120^\circ$, а значит меньший угол не больше, чем 60° градусов как смежный.

   Решение 2.

   Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Её боковая сторона вдвое меньше основания и, значит, не длиннее радиуса окружности. Поэтому боковые стороны стягивают дуги не больше, чем 60 градусов. А угол между диагоналями равен полусумме этих дуг.

3. предложил А. Шень

   Есть бесконечная в одну сторону клетчатая полоска, клетки которой пронумерованы натуральными числами, и мешок с десятью камнями. В клетках полоски камней изначально нет. Можно делать следующее:

   - перемещать камень из мешка в первую клетку полоски или обратно;
   - если в клетке с номером i лежит камень, то можно переложить камень из мешка в клетку с номером $i + 1$ или обратно.

Можно ли, действуя по этим правилам, положить камень в клетку с номером 1000?

Ответ: да.

Решение. Заметим, для каждого действия есть обратное ему. Поэтому, если мы из ситуации A, действуя по правилам, получили ситуацию B, то из ситуации B можем получить ситуацию A, действуя по правилам.

Покажем по индукции, что если есть запас в n камней, то, действуя по вышеуказанным правилам, можно положить камень в любую клетку от 1 до $2^n - 1$.

База индукции: $n = 1$. Очевидно.

Переход индукции. Допустим, мы доказали, что при помощи запаса в n камней можно положить камень во все клетки до $(2^n - 1)$-ой. Пусть теперь есть n чёрных камней и один красный камень. Будем действовать следующим образом:
(1) Не вынимая красный камень из мешка, положим чёрный камень в $(2^n - 1)$-ю клетку. Это можно сделать по предположению индукции.
(2) Положим красный камень в 2^n-ю клетку.
(3) Проведём операции как в пункте (1), но противоположные и в обратном порядке. Понятно, что красный камень не помешает это сделать. В конце окажется, что все чёрные камни снова лежат в мешке, а на полоске ровно один камень – красный камень в клетке 2^n. Договоримся, что далее мы красный камень убирать не будем.
(4) Клетки с номерами от $2^n + 1$ до $2^{n+1} - 1$ образуют полоску длины $2^n - 1$. К ней применимо предположение индукции для n камней, так как красный камень позволяет совершать операции с самой левой клеткой этой полоски. Поэтому можно положить камень в последнюю клетку.

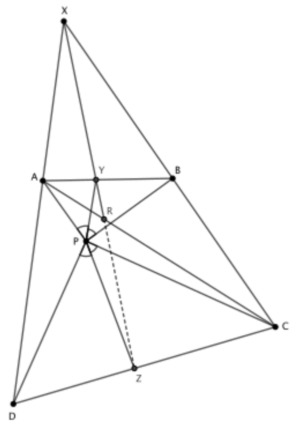
Таким образом, имея запас в 10 камней, можно положить камень во все клетки с номерами от 1 до $1023 = 2^{10} - 1$.

Комментарий: На самом деле достаточно полоски длиной 1000. Действительно,заметим, что среди клеток с номерами от 1000 по 1023 самый первый камень будет положен в клетку с номером 1000. То есть, чтобы положить камень в 1000-ю клетку, клетки с номерами от 1001 до 1023 использовать не обязательно, а значит, при запасе в 10 камней можно положить камень в последнюю клетку полоски длины 1000.

4. *Ф. Нилов*

Внутри четырехугольника $ABCD$ взяли точку P. Прямые BC и AD пересекаются в точке X. Оказалось, что прямая XP является внешней биссектрисой углов APD и BPC. Пусть PY и PZ — биссектрисы треугольников APB и DPC. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Первое решение.



Рассмотрим $\triangle PBC$ и внешнюю биссектрису XP угла BPC, $\triangle APB$ и биссектрису PY угла APB, $\triangle PCD$ и биссектрису PZ угла DPC, $\triangle APD$ и внешнюю биссектрису XP угла APD. Из свойства биссектрисы

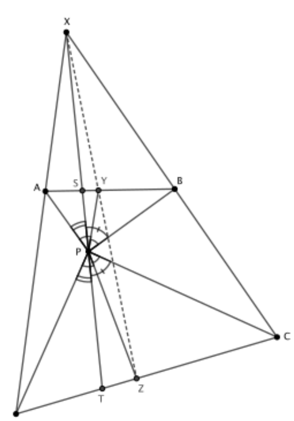
$$\frac{BX}{XC} = \frac{PB}{PC}, \qquad \frac{AY}{YB} = \frac{PA}{PB}, \qquad \frac{PD}{PC} = \frac{DZ}{ZC}, \qquad \frac{PA}{PD} = \frac{AX}{XD}$$

Пусть прямая XY пересекает отрезок AC в точке R. Используя теорему Менелая для треугольника ABC и прямой XYR, получаем:

$$1 = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AY}{YB} = \frac{PB}{PC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{PA}{PD} = \frac{DZ}{ZC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AX}{XD}$$

Применяя теорему Менелая для треугольника ACD, получаем, что точки Z, R, X лежат на одной прямой. Остается вспомнить, что точка Y тоже лежит на этой прямой.

Второе решение.



Пусть прямая XP пересекает AB и CD в точках S и T соответственно. По условию $\angle DPT = \angle APS$, $\angle TPC = \angle SPB$, $\angle DPZ = \angle ZPC$, $\angle APY = \angle YPB$. Запишем равенства двойных отношений (см. например [1, 2]):

$$[XD, XT, XZ, XC] = [D, T, Z, C] = [PD, PT, PZ, PC] = [PA, PS, PY, PB] = \\ = [A, S, Y, B] = [XA, XS, XY, XB] = [XD, XT, XY, XC]$$

Значит, прямые XZ и XY совпадают, что и требовалось.

5. Н. Белухов

   Пусть p и q – взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. При этом каждый раз она прыгает либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся на d.

   Решение. Пусть в момент времени k лягушка находится в точке a_k, $a_0 = a_N = 0$. Продолжим последовательность (a_i) периодически по правилу $a_{i+N} = a_i$. Обозначим $A = p+q$. Заметим, что $-q \equiv p \mod A$, поэтому для любого n $a_n \equiv np \mod A$.

   Так как p и q взаимно простые, то p и A взаимно простые. Докажем, что найдётся такое целое s, что $sp \equiv d \mod A$.

   В самом деле, числа $0, p, 2p, \ldots, (A-1)p$ дают различные остатки при делении на A (иначе для некоторых $0 \leqslant i < j < A$ получаем что $(j-i)p \equiv 0 \mod A$, чего не может быть так как $j - i$ не делится на A, а p взаимно просто с A). А значит, среди этих остатков есть и d.

   Обозначим $r_k = a_{s+k} - a_k$. Легко видеть, что все r_k дают остаток d от деления на A.

   Если a_k самая левая из точек, посещённых лягушкой, то $r_k > 0$. Если a_k самая правая точка, то $r_k < 0$. Значит, при некотором i в последовательности r_i происходит перемена знака, $r_i < 0$ и $r_{i+1} > 0$. Тогда $r_{i+1} < A$, потому что

   $$r_{i+1} - r_i = (a_{i+s+1} - a_{i+s}) - (a_{i+1} - a_i) \leqslant p - (-q) = A.$$

   А так как $r_{i+1} \equiv d \mod A$, то $r_{i+1} = d$, что и требовалось.

6. Д. Креков

   Доказать, что существует вещественное число A, такое что расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата равно двум при любом n.

   Решение.

   Пусть t – больший корень многочлена $x^2 - 10x + 1$, тогда $t + \frac{1}{t} = 10$. Докажем по индукции, что число $t^n + \frac{1}{t^n}$ целое при любом целом неотрицательном n. Действительно, это верно при $n = 0, 1$. Кроме того,

$$t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}} = (t^n + \frac{1}{t^n})(t + \frac{1}{t}) - (t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}}),$$

что позволяет проделать шаг индукции.

Положим $A = t^2$, тогда $A^n + \frac{1}{A^n} = (t^n + \frac{1}{t^n})^2 - 2$ и $\frac{1}{A^n} < 1$, значит $A^n + \frac{1}{A^n}$ и есть верхняя целая часть A^n, а ближайший к ней квадрат целого числа равен $(t^n + \frac{1}{t^n})^2$.

Примечание. Конечно же, в качестве t можно взять любое число, являющееся большим корнем многочлена вида $x^2 - nx + 1 = 0$, где n – натуральное число, не меньшее 3. Как легко видеть, расстояние от $n-$й степени такого числа до ближайшего целого стремится к 0 (это следует из того, что $t^n + \frac{1}{t^n}$ целое). Более общо, если $P(x)$ – приведенный многочлен с целыми коэффициентами, у которого все корни, кроме одного, по модулю меньше 1, то этот корень вещественный и имеет то свойство, что расстояние от $n-$й степени этого корня до ближайшего целого числа стремится к 0 (это следует из того, что сумма $n-$х степеней всех корней такого многочлена, будучи симметрической функцией от корней с целыми коэффициентами, целочисленно выражается через элементарные симметрические функции от этих корней, которые являются целыми).

Числа с таким свойством, являющиеся корнями многочленов с рациональными коэффициентами, называются числами Пизо. Они представляют интерес в связи с задачами диофантовой аппроксимации и изучались в работах Туэ, Харди, Пизо. Свое название они получили после публикации Шарля Пизо, который в своей диссертации открыл много замечательных свойств этих чисел, см. [3].

Список литературы

[1] Заславский А. А., Геометрические преобразования., М.: МЦНМО, 2004.

[2] Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки – к профессии. ., М.: МЦНМО, 2018.

[3] Pisot Charles, La répartition modulo un et les nombres algébriques, Thèses de l'entre-deux-guerres, no. 203 (1938).